ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 11.11.23

Новый материал (конспект в рабочую тетрадь!!!)

Тема: «Определители матриц и их свойства. Обратные матрицы»

Определителем квадратной матрицы 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Пример:
Вычислить определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3) - 2\cdot(-7) = 3 + 14 = 17.$$

Определителем квадратной матрицы 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Запомнить это определение можно с помощью «правила треугольников» (правило Сарруса). Это правило проиллюстрируем на схеме:

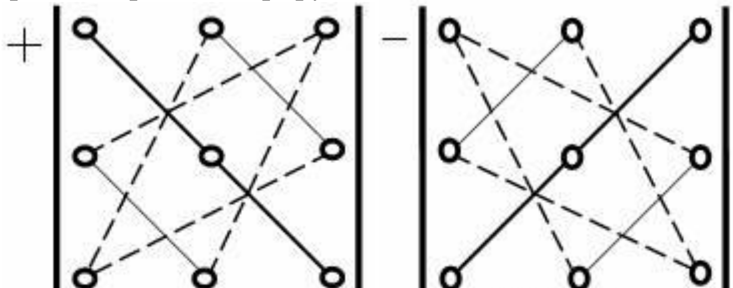

Рис. А Рис. Б

Пример:
Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot2 + (-1)\cdot1\cdot(-1) + 0\cdot0\cdot3 - 3\cdot1\cdot(-1) - (-1)\cdot0\cdot2 - 1\cdot0\cdot1 = 2 + 1 + 0 + 3 - 0 = 6$$

Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель Δ, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца , содержащих элемент a_{ij} .

Пример:
Минор M_{12}, соответствующий элементу a_{12} определителя получается, если вычеркнуть из определителя D первую строку и второй столбец, т.е.

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Примеры: Найти алгебраические дополнения определителя $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - (-20)) = 4 + 20 = 24;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2 - 0) = (-1) \cdot (-2) = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 0) = 4;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 - (-8)) = (-1) \cdot 10 = -10;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 - 0) = 6;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-12 - 0) = 12;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 - 4) = 1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (15 - (-2)) = (-1) \cdot 17 = -17;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 - (-1)) = 7.$$

Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца

Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя Δ *на соответствующие им алгебраические дополнения равна этому определителю* Δ.

Пример: Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ разложением по элементам первой строки

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 5 + 5\cdot 1\cdot 5 + 3\cdot(7+12) = 122$$

Обратная матрица

Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю, и *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Пусть А – квадратная матрица.
Обратной к матрице А называется матрица A^{-1}, которая удовлетворяет условию

$$\mathbf{AA^{-1} = A^{-1}A = E.}$$

Если обратная матрица к матрице А существует, то матрица А называется *обратимой*. Операция нахождения обратной матрицы при условии, что она существует, называется обращением матрицы.

Для вычисления обратной матрицы используют следующий алгоритм:

1.Находим определитель матрицы и убеждаемся, что он отличен от нуля.
2.Находим алгебраические дополнения к элементам матрицы и записываем новую матрицу.
3.Меняем местами столбцы полученной матрицы (транспонируем матрицу).
4. Умножаем полученную матрицу на $\frac{1}{\Delta}$
5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы, используя определение $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Пример:

Найти матрицу, обратную данной и сделать проверку: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Решение.

1) Находим определитель матрицы:

$$\Delta\ A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 5\cdot 1 + (-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 3 - 5\cdot(-2)\cdot 0 = 16$$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то матрица A^{-1} существует

2) Находим алгебраические дополнения элементов матрицы А:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 5\cdot(-2) = 16 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -\left(0\cdot 5 - 1\cdot(-1)\right) = -1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\left(2\cdot 3 - 1\cdot(-2)\right) = -8 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2) - 2\cdot 1 = 0$$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 8$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(0 \cdot (-2) - 2 \cdot 1) = 2$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -((-1) \cdot 3 - 5 \cdot 1) = 8$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 2$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = -1$

Запишем новую матрицу

$$\begin{pmatrix} 16 & -8 & 8 \\ 8 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Транспонируем

$$\begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ -8 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Умножаем полученную матрицу на $\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{16}$

Тогда, матрица обратная данной А, равна $A^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ -8 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5) Проводим проверку по определению: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ -8 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 16 \cdot 0 + 8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 16 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 16 \cdot 1 + 8 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \\ -8 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -8 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 & -8 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 8 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 8 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 & 8 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка показала, что обратная матрица найдена верно.

Ответ: $A^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ -8 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru